ÔN TẬP TOÁN 11 (TUẦN 17, 18)

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I.Tóm tắt lý thuyết :

1. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta tiến hành hai bước:

♦ Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với n = 1.

♦ Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì n = k (k ≥ 1) (ta gọi là giả thiết quy nạp) và chứng minh rằng nó cũng đúng với n=k+1.

2. Trong trường hợp phải chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên n ≥ p (p là số tự nhiên) thì:

♦ Ở bước 1, ta kiểm tra mệnh đề đúng với n = p.

♦ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì n = k (k ≥ p) và chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

3. Phép thử với một số hữu hạn số tự nhiên, tuy không phải là chứng minh, nhưng cho phép ta dự đoán được kết quả. Kết quả này chỉ là giả thiết, và để chứng minh ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học.

Chú ý: Phương pháp quy nạp toán học còn được ứng dụng nhiều trong số học và hình học

II. Bài tập:

1. Phương pháp giải :

Giả sử cần chứng minh đẳng thức P(n) = Q(n) (hoặc P(n) > Q(n)) đúng với $n \geq n_0$, $n_0 \in N^*$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0)$,$Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0) = Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử P(k) = Q(k) ; $k \geq n_0$, $k \in N^*$, ta cần chứng minh P(k+1) = Q(k+1).

2. **Bài tập vận dụng**

Bài 1: Chứng mình với mọi số tự nhiên n ≥ 1 ta luôn có: 1+2+3+...+n= (n(n+1))/2

Đặt P(n) = 1+2+3+...+n : tổng n số tự nhiên đầu tiên : $Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Ta cần chứng minh P(n) = Q(n) n ≥ 1 ,n ∈ N*.

Bước 1: Với n = 1 ta có P(1) = 1, Q(1) = 1

⇒ P(1) = Q(1) = 1đúng với n = 1.

Bước 2: Giả sử P(k0 = Q(k) với k ≥ 1 ,k ∈ N*. tức là:

$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$

Ta cần chứng minh P(k+1) = Q(k+1), tức là:

$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (2)$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} VT(2) &= (1+2+3+...+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{(Do đẳng thức (1))} \\ &= (k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = VP(2) \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi n ≥ 1.

Bài 2: Chứng minh với mọi số tự nhiên n ≥ 1 ta luôn có: $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$

♦ Với n = 1 ta có VT =VP = 1

Suy ra đẳng thức đã cho đúng với n = 1.

♦ Giả sử đẳng thức đã cho đúng với n = k với k ≥ 1 ,k ∈ N*. tức là:

$1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1 = k^2$ (1)

Ta cần chứng minh đẳng thức đã cho đúng với n = k+1, tức là:

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (2)

Thật vậy: $VT(2) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 = VP(2)$

Vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi n ≥ 1.

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1 thì $A(n)=7^n+3n-1$ luôn chia hết cho 9

Lời giải:

* Với n=1 ⇒ $A(1)=7^1+3.1-1=9$ ⇒ A(1)chia hết cho 9

* Giả sử A(k)chia hết cho 9 ∀k ≥ 1, ta chứng minh A(k+1)chia hết cho 9

Thật vậy:$A(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)1=7.7^k+21k-7-18k+9$ ⇒ A(k+1)=7A(k)-9(2k-1)

Vì A(k) chia hết cho 9 và 9(2k-1) chia ết cho 9 nên A(2k+1) chia hết cho 9

Vậy A(n) chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

***Bài tập tương tự**

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1 , ta luôn có

$$1^2 + 2^2 + \cdots (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ với } \forall n \geq 1.$$

Bài 3: Chứng minh rằng với ∀n ≥ 1, ta có bất đẳng thức: $\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6.....2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

3. Bài tập trắc nghiệm phương pháp quy nạp toán học

Bài 1: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) đúng với mọi số tự nhiên n > p (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề A(n) đúng với n = p

- Bước 2, giả thiết mệnh đề A(n) đúng với số tự nhiên bất kỳ n > p và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k+1

Trong hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Hd- đáp án

Đáp án: **C**

Bài 2: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) đúng với mọi số tự nhiên n ≥ p (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. n = 1 **B.** n = p **C.** n > p **D.** n ≥ p

Hd- đáp án

Đáp án: **B**

Bài 3: Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho 7 mọi n ∈ ¥" (*) như sau:

- Giả sử đúng với n = k, tức là 8^n+1 chia hết cho 7

- Ta có: $8^{k+1}+1=8(8^k+1)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được 8^{k+1}+1 chia hết cho 7 Vậy đẳng thức đúng với mọi n ∈ ¥

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Hd- đáp án

Đáp án: **D**

Thiếu bước 1 là kiểm tra với n = 1, khi đó ta có 8 +1 = 9 không chia hết cho 7.

Bài 4: Mạnh cầm một tờ giấy và lấy kéo cắt thành 7 mảnh sau đó nhặt một trong số bảy mảnh giấy đã cắt và lại cắt thành 7 mảnh. Mạnh cứ tiếp tục cắt như vậy. Sau một hồi, Mạnh thu lại và đếm tất cả các mảnh giấy đã cắt. Hỏi kết quả nào sau đây có thể xảy ra?

A. Mạnh thu được 122 mảnh **B.** Mạnh thu được 123 mảnh

C. Mạnh thu được 120 mảnh **D.** Mạnh thu được 121 mảnh

Hd - đáp án

Đáp án: **D**

Mỗi lần cắt một mảnh giấy thành 7 mảnh, tức là Mạnh tạo thêm 6 mảnh giấy. Do đó công thức tính số mảnh giấy theo n bước được thực hiện là $S_n = 6n + 1$. Ta chứng minh tính đúng đắn của công thức trên bằng phương pháp quy nạp theo n.

Bước cơ sở. Mạnh cắt mảnh giấy thành 7 mảnh, n =1, S(1) = 6.1+1 =7

Công thức đúng với n = 1

Bước quy nạp: giả sử sau k bước, Mạnh nhận được số mảnh giấy là S(k)=6k+1

Sang bước thứ k +1, Mạnh lấy một trong số những mảnh giấy nhận được trong k bước trước và cắt thành 7 mảnh. Tức là Mạnh đã lấy đi 1 trong S(k) mảnh và thay vào đó 7 mảnh được cắt ra. Vậy tổng số mảnh giấy ở bước k + 1 là: S(k =1) = S(k) -1 + 7= S(k) + 6 = 6k + 1 + 1 = 6(k+1) +1

Vậy công thức S(n) đúng với mọi n $\in$ N*. Theo công thức trên chỉ có phương án D thoả mãn vì 121 =6.20 + 1

Bài 5: Cho x≠0 và x +1/x là một số nguyên. Khi đó với mọi số nguyên dương n, có kết luận gì về $T(n,x) = x^n + 1/x^n$.

A. T(n,x) là số vô tỉ **B.** T(n,x) là số không nguyên

C. T(n,x) là số nguyên **D.** Các kết luận trên đều sai

Hd - đáp án

Đáp án: **C**

Ta có

T(1,x)=$x+\frac{1}{x}$ là số nguyên.

T(2,x) =$X^2+\frac{1}{X^2}=\left(X+\frac{1}{X}\right)^2$-2 là số nguyên.

Ta sẽ chứng minh T(1,x) là số nguyên

Thật vậy, áp dụng phép chứng minh quy nạp, ta có:

Bước cơ sở: T(1,x) là số nguyên. Khẳng định đúng với n=1

Bước quy nạp: Giả sử T(n,x) là số nguyên với mọi n $\geq$ 1. Ta sẽ chứng minh T(n+1,x) cũng là số nguyên

Ta có:

T(n+1,x) =$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

=T(1,x).T(n,x) – T(n-1,x).

Theo giả thuyết quy nạp, ta có T(1,x),T(n,x), T(n-1,x) là các số nguyên nên T(n+1,x) là số nguyên.

DÃY SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa dãy số: Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương N^* được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

u: $N^* \rightarrow R$

n $\rightarrow$ u(n).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n,\ldots$,

trong đó u_n = u(n) hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập M = {1,2,3,…,m} với m $\in N^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng cuối.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi n $\in N^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi n $\in N^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy –3; 9; –27; 81,… không tăng cũng không giảm.

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$u_n \le M,\ \forall\ n \in N^*$

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$u_n \ge m,\ \forall n \in N^*$

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho : $m \le u_n \le M,\ \forall\ n \in N^*$

II. Bài tập:

1. Phương pháp giải:

1.1. Dãy số là tập hợp các giá trị của hàm số u: : $u: N^* \to R$

$n \to u(n)$.

Được sắp xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp theo đối số tự nhiên n: u(1); u(2); u(3); ....u(n);....

♦ Ta kí hiệu u(n) bởi u_n và gọi là số hạng thứ n hay số hạng tổng quát của dãy số, u_1 được gọi là số hạng đầu của dãy số.

♦ Ta có thể viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3 \ldots..u_n,\ldots.$ hoặc dạng rút gọn (u_n).

1.2. Dãy số tăng, dãy số giảm

♦ Dãy số (u_n) gọi là dãy tăng nếu $u_n < u_{n+1}\ \forall n \in N^*$

♦ Dãy số (u_n) gọi là dãy giảm nếu $u_n > u_{n+1}\ \forall n \in N^*$

1.3. Dãy số bị chặn

♦ Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn trên nếu có một số thực sao cho

$u_n < M\ \forall n \in N^*$.

♦ Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn dưới nếu có một số thực sao cho

$u_n > m \forall n \in N^*$.

♦ Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy bị chặn, tức là tồn tại số thực dương M sao cho $|u_n| < M\ \forall n \in N^*$.

♦ Để xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) ta xét : $k_n=(u_{n+1}-u_n)$

* Nếu $k_n > 0 \forall n \in N^* \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng

* Nếu $k_n < 0 \forall n \in N^* \Rightarrow$ dãy (u_n) giảm.

Khi $u_n > 0\ \forall n \in N^*$ ta có thể xét $t_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* Nếu $t_n > 1 \Rightarrow$ dãy số (u_n) tăng

* Nếu $t_n < 1 \Rightarrow$ dãy số (u_n) giảm

♦ Để xét tính bị chặn của dãy số ta có thể dự đoán rồi chứng minh bằng quy nạp.

2. Bài tập vận dụng

Bài 1: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

1. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

2. Tìm số hạng thứ 100 và 200

3. Số 167/84 có thuộc dãy số đã cho hay không

4. Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Lời giải:

1. Năm số hạng đầu của dãy là: $u_1=1$, $u_2=5/4$, $u_3=7/5$, $u_4=3/2$,$u_5=11/7$.

2. Số hạng thứ 100: $u_{100} = \frac{2.100+1}{100+2} = \frac{67}{34}$

Số hạng thứ 200: $u_{200} = \frac{2.200+1}{200+2} = \frac{401}{202}$

3. Giả sử

$$u_n = \frac{167}{84} => \frac{2.n+1}{n+2} = \frac{167}{84} => n = 250$$

Vậy 167/84 là số hạng thứ 250 của dãy số u_n .

4. Ta có:

$$u_n = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

$\Rightarrow u_n$ nguyên khi và chỉ khi 3 chia hết cho (n+2) $\Rightarrow$ n = 1

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng là số nguyên.

Bài 2: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2008; u_2 = 2009 \\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2,} \forall n \geq 1 \end{cases}$

1. Chứng minh rằng dãy (v_n):$v_n=u_n-u_{(n-1)}$ là dãy không đổi

2. Biểu thị u_n qua $u_{(n-1)}$ và tìm CTTQ của dãy số (u_n)

Lời giải:

1. Ta có: $u_{(n+2)}-u_{(n+1)}=u_{(n+1)}-u_n \Rightarrow v_{(n+2)}=u_{(n+1)}=\cdots=u_2=1$

2. Ta có: : $u_n - u_{(n-1)} = 1 \Rightarrow u_n = u_{(n-1)} + 1$

Suy ra $u_n = (u_n - u_{(n-1)}) + (u_{(n-1)} - u_{(n-2)}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + u_1 = n - 1 + 2018 = n + 2017$

Bài 3: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau

1. $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

2. $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Lời giải:

1. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5n^2 + 10n + 2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

nên dãy (u_n) là dãy tăng

2. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0$$

Nên dãy (u_n) giảm.

Bài 4: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) , biết:

1. $u_n = \frac{2n - 13}{3n - 2}$

2. $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + n + n^2}}$

Lời giải:

1. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n - 11}{3n + 1} - \frac{2n - 13}{3n - 2} = \frac{34}{(3n+1)(3n-2)} > 0$$

với mọi $n \geq 1$.

Suy ra $u_{(n+1)} > u_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác:

$$u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} => -11 \leq u_n \leq \frac{2}{3} \ \forall n \geq 1$$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

2. Ta có:

$$u_{n+1} > u_n = \frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2} - \frac{n^2+3n+1}{n+1}$$

$$= \frac{n^2+5n+5}{n+2} - \frac{n^2+3n+1}{n+1} = \frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} > 0 \forall n \geq 1$$

$=> u_{n+1} > u_n \forall n \geq 1 =>$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

$=> u_n = \frac{n^2+2n+1}{n+1} = n+1 \geq 2 =>$ dãy (u_n) bị chặn dưới.

3. Ta có: $u_n > 0\ \forall n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2}+(n+1)+1} = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}} < 1 \forall n$$

⇒ $u_{(n+1)} < u_n\ \forall n \geq 1$ ⇒ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác: $0 < u_n < 1$ ⇒ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Bài 5: Cho dãy số (u_n):

$u_n = \frac{an+2}{2n-1}, n \geq 1$

a) Khi a = 4, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

b) Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

Lời giải:

a) Với a = 4 ta có:

$u_n = \frac{4n+2}{2n-1}$.

Ta có: 5 số hạng đầu của dãy là

$u_1=6$; $u_2=10/3$; $u_3=14/5$; $u_4=18/7$; $u_5=22/9$.

b) Ta có dãy số u_n tăng khi và chỉ khi

$=> u_{n+1} - u_n = \frac{-a-4}{(2n+1)(2n-1)} > 0\ \forall n \in ¥$

⇒ -a-4 > 0 ⇒ a < -4

***Bài tập tương tự:**

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$

1. Viết 7 số hạng đầu tiên của dãy

2. Chứng minh rằng: $u_n=5.3^{n-1}-6.2^{n-1}\ \forall n \geq 1$

Bài 2: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2+4}$

1. Viết 6 số hạng đầu của dãy số

2. Tính u_20 ,u_2010

3. Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2; \\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$

1. Tìm 5 số hạng đầu của dãy

2. Chứng minh rằng : $u_n=5.2^n-3n-5\ \forall n=1,2,3\dots$

3. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho dãy số (u_n). Khi đó số hạng thứ 5 của dãy u_n là

(u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n \end{cases}$ *với mọi* $n \geq 1$

A. 10 **B.** 48 **C.** 16 **D.** 6

Hd- đáp án

Đáp án: **B**. Ta có $u_2=u_1$, $u_3=2u_2$, $u_4=3u_3$, $u_5=4u_4=48$.

Bài 2: Cho dãy số u_n. Khi đó số hạng u_{3n} của dãy (u_n) là:

$u_n = \frac{sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n+1}$ *với mọi* $n \geq 1$

A. $\frac{1}{3n+1}$

B. $\frac{1}{n+1}$

C. $\frac{-1}{3n+1}$

D. 0

Hd - đáp án

Đáp án: **D**

Ta có $u_{3n}=\frac{sin(n\pi)}{3n+1}$.

Bài 3: Cho dãy số (u_n). Khi đó số hạng thứ 5 của dãy số là:

$$(u_n):\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} \text{với mọi } n \geq 1$$

A. 11 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 10

Hd- đáp án

Đáp án: **A**

Ta có $u_2=u_1+1=2$, $u_3=u_2+2=4$, $u_4=$
$u_3+3=7$, $u_5=u_4+4=11$.

Bài 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = n^2 – 4n – 2$. Khi đó u_{10} bằng:

A. 48 **B.** 60 **C.** 58 **D.** 10

Hd - đáp án

Đáp án: **C**

Hướng dẫn giải. $u_{10} = 10^2 – 4.20 – 2 =58$.

Bài 5: Cho dãy số $u_n = 1+ (n +3).3^n$. khi đó công thức truy hồi của dãy là:

A. $u_{n+1} = 1 +3u_n$ với $n \geq 1$ **B.** $u_{n+1} = 1 +3u_n + 3_{n+1}$ với $n \geq 1$

C. $u_{n+1} = u_n + 3_{n+1} - 2$ với $n \geq 1$ **D.** $u_{n+1} =3u_n + 3_{n+1} - 2$ với $n \geq 1$

Hd- đáp án

Đáp án: **D**

Ta có

$u_{no+1} = 1+ (n+4).3^{n+1} = 1 + (n+3).3^{n+1} + 3^{n+1}$

$= 1 + 3^n.(n+3).3 + 3^{n+1} = 3[1 + (n+ 3).3^n] + 3^{n+1} – 2 = 3u_n + 3^{n+1} -2$

Bài 6: Cho dãy số (u_n). Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

$$u_n = \frac{n}{3^n-1}$$

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{26}$

C. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$

Hd- đáp án

Đáp án: **B**

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có $u_1=1/2;u_2=1/4;u_3=3/26$

$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}.$

Bài 7: Cho dãy số (u_n). Tìm số hạng u_5

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$$

A. $u_5 = 1/4$ **B.** $u_5 = 17/12$

C. $u_5 = 7/4$ **D.** $u_5 = 71/39$

Hd- đáp án

Đáp án: **C**

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = 49/28 = 7/4$.

Bài 8: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = (-1)^n.2n$ Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2$ **B.** $u_2 = 4$ **C.** $u_3 = -6$ **D.** $u_4 = -8$

Hd- đáp án

Đáp án: **D**

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_1 = -2.1 = -2; u_2 = (-1)^2.2.2 = 4;$
$u_3 = (-1)^3.2.3 = 6; u_4 = (-1)^4.2.4 = 8.$

Bài 9: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = (-1)^n.5^{2n+5}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Hd-đáp án

Đáp án: **D**

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+5} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+5} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Bài 10: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ B. $u_n = n + \frac{1}{n}$

C. $u_n = 2^n + 1$ D. $u_n = \frac{n}{n+1}$

Hd- đáp án

Đáp án: **D**

Các dãy số n^2; n; 2^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn,

nên các dãy $\sqrt{n^2+1}; n+\frac{1}{n}; 2^n+1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0< u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$

Bài 11: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ B. $u_n = 3^n$

C. $u_n = \sqrt{n+1}$ D. $u_n = n^2$

Hd- đáp án

Đáp án: **A**

Các dãy số n^2; n; 3^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn

nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Bài 12: Cho dãy số (u_n). Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

$u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$

A. 1/3 **B.** 1 **C.**1/2 **D.** 0

Hd- đáp án

Đáp án: **B**

Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$

Mặt khác: u_n=5/7 > 1/2 > 0 nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Bài 13: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ B. . $u_n = \frac{1}{n}$

C. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$ D. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

Hd-đáp án

Đáp án: **D**

Vì 2^n; n là các dãy dương và tăng nên $1/2^n$; $1/n$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án C:

$$u_n = \frac{n+5}{3n+1} => u_1 = \frac{3}{2};\ u_2 = \frac{7}{6} => u_1 > u_2$$

Bài 14: Cho dãy số $z_n = 1 + (4n - 3).2^n$

A. Dãy z_n là dãy tăng **B.** Dãy z_n bị chặn dưới

C. Cả A và B đề sai **D.** Cả A và B đều đúng

Hd- đáp án

Đáp án: **D**

Hướng dẫn giải. $z_{n+1} = 1 + (4n+1).2^{n+1}$; $z_n = 1 + (4n-3).2^n$

$\Rightarrow z_{n+1} - z_n = 2^n(4n+5) > 0\ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow (z_n)$ tăng $\Rightarrow z_n \geq z_1 = 3\ \forall n \in N^*$

Bài 15: Cho dãy số $u_n = n^2 - 4n + 7$. Kết luận nào đúng?

A. Dãy (u_n) bị chặn trên **B.** Dãy (u_n) bị chặn dưới

C. Dãy (u_n) bị chặn **D.** Các mệnh đề A,B,C đều sai

Hd- đáp án

Đáp án: **B**

Hướng dẫn giải. $u_n = n^2 - 4n + 7 = (n-2)^2 + 3 \geq 3$

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 3

(u_n) không bị chặn trên bởi vì n càng lớn thì u_n càng lớn

Bài 16: Xét dãy (u_n). Khi đó số α dương lớn nhất thoả mãn $u_n \geq \alpha\ \forall n \geq 1$ là:

(u_n): $u_n = n + \frac{1}{n}$

A. α =1 **B.** α =2 **C.** α =1/2 **D.** α =√2

H d-đáp án

Đáp án: **B**

Ta có $u_n = n + \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \geq 1 \rightarrow \alpha = 2$

VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD. A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}\ \text{vaø}\ \vec{b}\ \text{cuøng phöông}\ (\vec{a}\neq\vec{0})\Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (k ≠ 1), O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB};\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}\ \text{vaø}\ \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

II.BÀI TẬP:

1. **Dạng : CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ.**

*** Các kỷ năng cần đạt.**

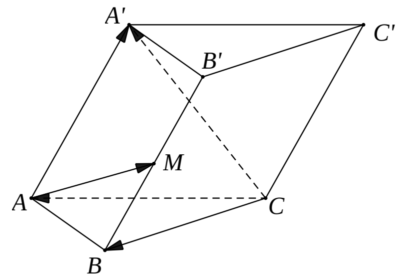
- Nhận dạng nhanh các kiến thức.

- Biến đổi linh hoạt, mềm dẻo để đưa về các dạng đã học, các đẳng thức đã biết.

- Tìm lời giải gọn, nhẹ.

Bài **1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$.**

Hướng dẫn giải:



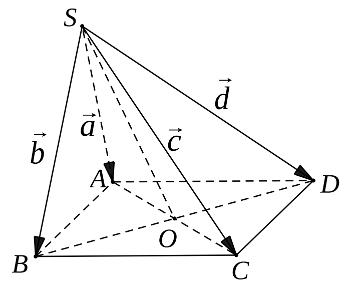
Ta phân tích như sau:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$$=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

Hướng dẫn giải:



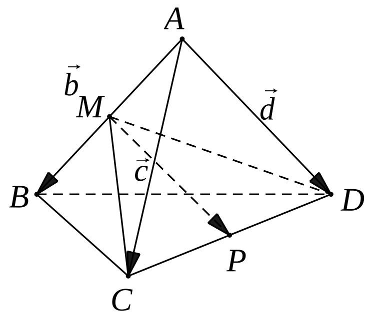
Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta phân tích như sau:

$$\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}$$ (do tính chất của đường trung tuyến)

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}.$$

Bài 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Chứng minh : $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Hướng dẫn giải:



Ta phân tích:

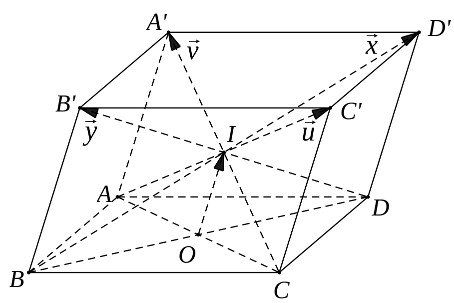
$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$$ (tính chất đường trung tuyến)

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-2\overrightarrow{AM}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right).$$

Bài 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$**.** Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Chứng minh: $2\overrightarrow{OI}=-\dfrac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Hướng dẫn giải:



Ta phân tích:

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}\right)=2\overrightarrow{AA'}.$$

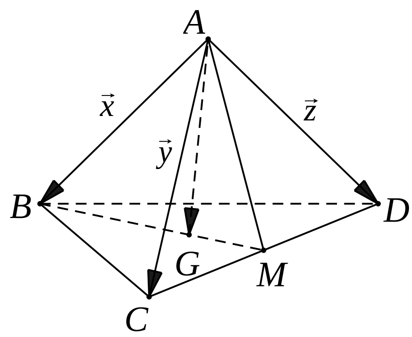
$\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}\right)=2\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}=4\overrightarrow{AA'}=-4\overrightarrow{A'A}=-4.2\overrightarrow{OI}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=-\dfrac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Bài 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Gọi M là trung điểm CD.

Ta phân tích:

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$.

* Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$, với M tuỳ ý.

Bài 2: Chứng minh rằng với 4 điểm A, B, C, D bất kì, ta luôn có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Bài 3: cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O.

a. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

b. Tính tổng: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$

2. Dạng : CHỨNG MINH BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG.

PHÂN TÍCH MỘT VEC TƠ THEO BA VECTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG CHO TRƯỚC

• *Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:*

+ Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

+ Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

Nếu có m, n $\in$ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ *thì* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

> • *Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho:* $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

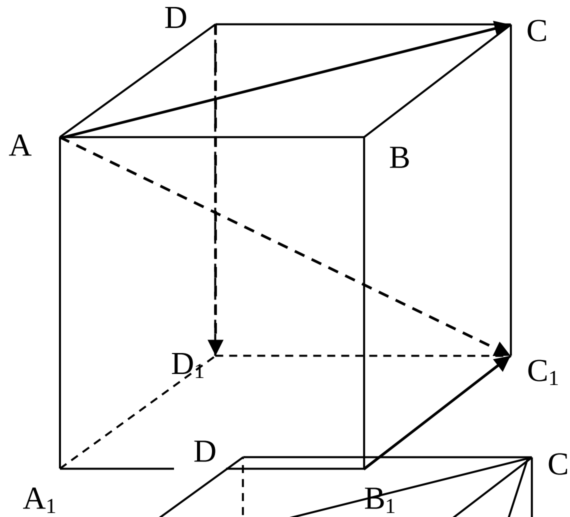
Bài 1: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chứng minh: $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Ta có: $\vec{y}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{z}\right)$ nên ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

Bài 2: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

<u>Hướng dẫn giải:</u>

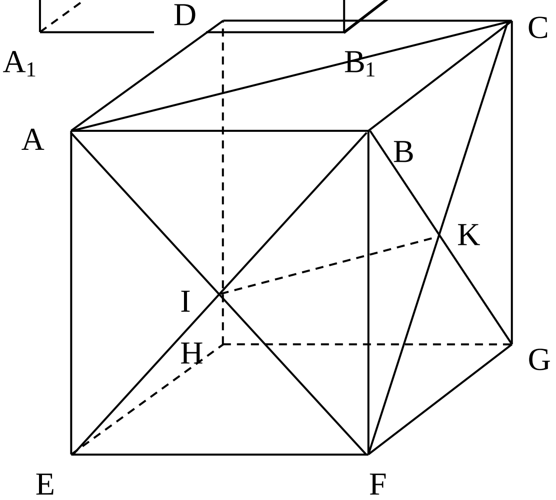


+ Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$.
Nên $k=1$.

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành

Chứng minh : $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

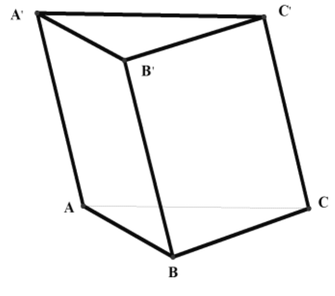
<u>Hướng dẫn giải:</u>



$$\begin{cases} IK//(ABCD) \\ GF//(ABCD) \\ \mathrm{BD}\subset(\mathrm{ABCD}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{BD} \text{ đồng phẳng.}$$

Bài 4: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

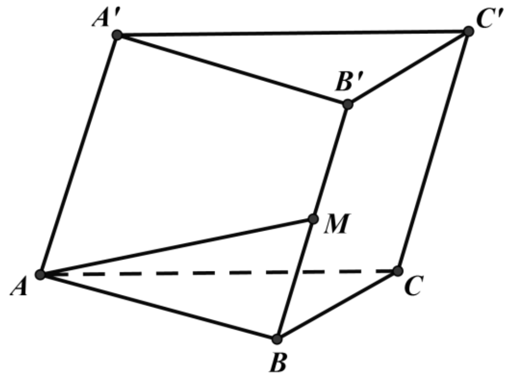


Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Bài 5: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ AM qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Hướng dẫn giải: **:**

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$



* Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS}=-2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

HD: Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Bài 2: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi M, N, I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AE, CG, AD, DH, GH, FG; P và Q lần lượt là trung điểm của NG và JH.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

b) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng.

HD: a) $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ *có giá cùng song song với (ABCD).*

b) $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ *có giá cùng song song với (BDG).*

Bài 3: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

HD: a) $\overrightarrow{B'C}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$ *b)* $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$.

Bài 4: Cho hình hộp OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.

a) Phân tích hai vectơ $\overrightarrow{OI}$ *và* $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{BI}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.

Bài 5: Cho hình lập phương ABCD.EFGH.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$.

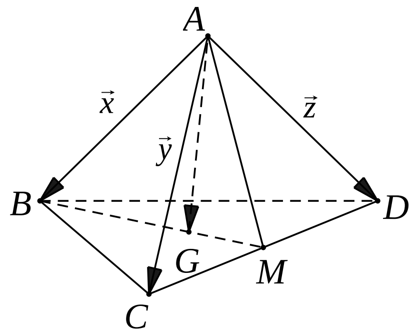
C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn A.

Gọi M là trung điểm CD.

Ta phân tích:



$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right).$$

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

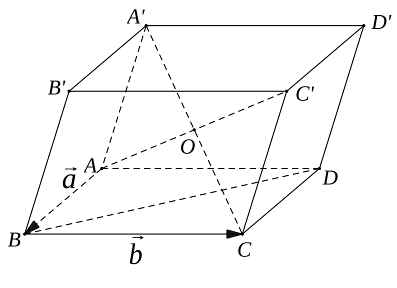
A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$. **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB'. **D.** M là trung điểm CC'.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn C.

Ta phân tích:



$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB'.

Câu 3: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương. **D.** Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn **B.**

+ Nhận thấy: $\vec{y}=-2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

Câu 4: Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

C. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

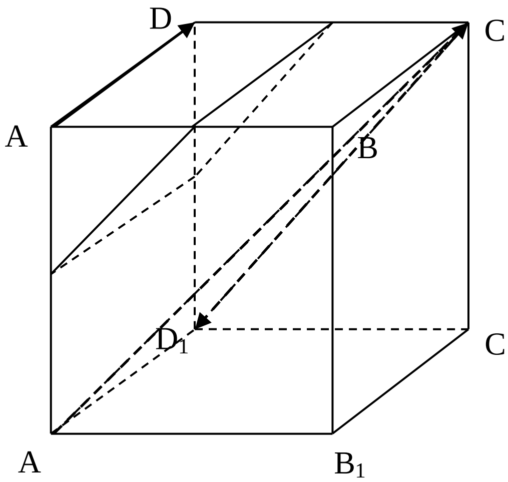
B. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn **C.**



$+M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ AA_1,DD_1,CD$.

Ta có $CD_1//(MNPQ);\ AD//(MNPQ);\ A_1C//(MNPQ)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 6: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vectơ $\vec{x};\vec{a}$ cùng phương.

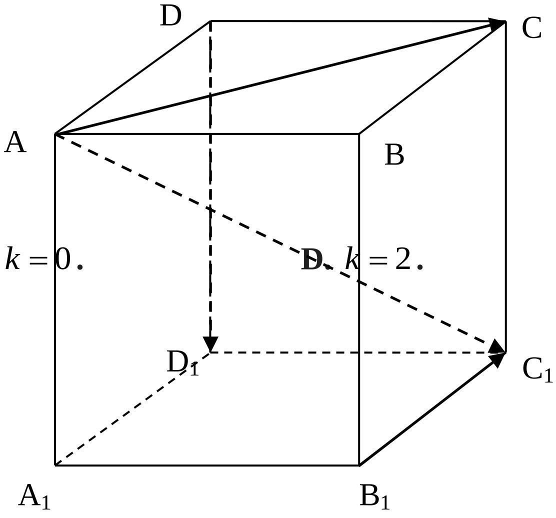
C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\vec{y}=\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{z}\right)$ nên ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.



Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

A. $k=4$.

B. $k=1$.

C. $k=0$.

D. $k=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

+ Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. Nên $k=1$.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

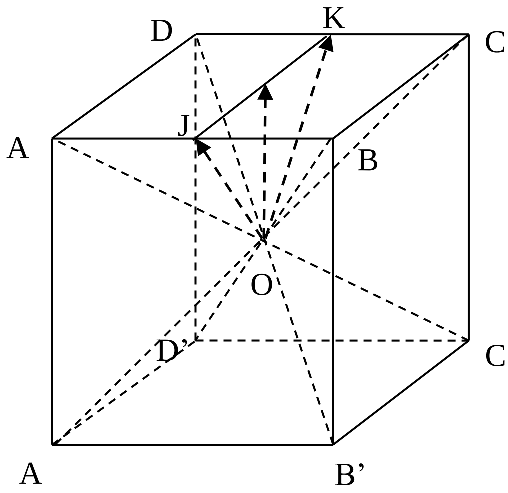
<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn A.

+ Gọi J,K lần lượt là trung điểm của AB,CD.

+Ta có:

$$2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$$

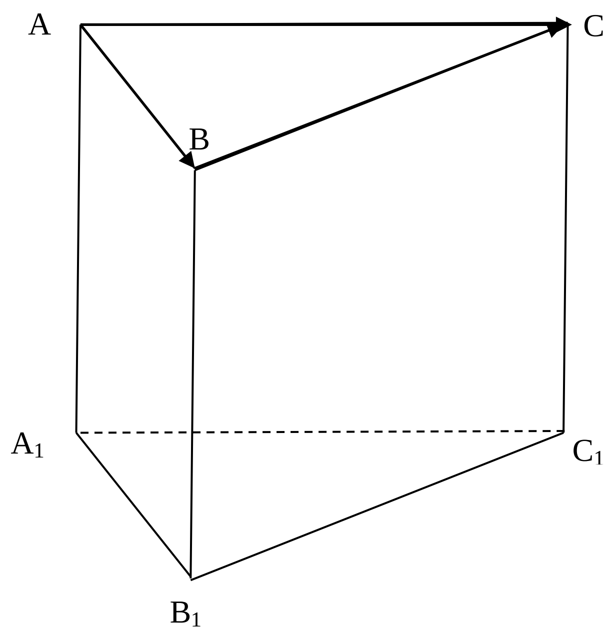


Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.
C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn C.



+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}$.

Câu 10 : Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IK};\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{IK},\overrightarrow{AC}$ cùng thuộc $(B'AC)$

B. Đúng vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}.$

C. Sai vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}).$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'}\Rightarrow$ ba véctơ đồng phẳng.

D. Đúng vì theo câu C $\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'}=2\overrightarrow{BC}.$

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I.Tóm tắt lý thuyết

1. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

- Góc giữa hai đường véctơ trong không gian:

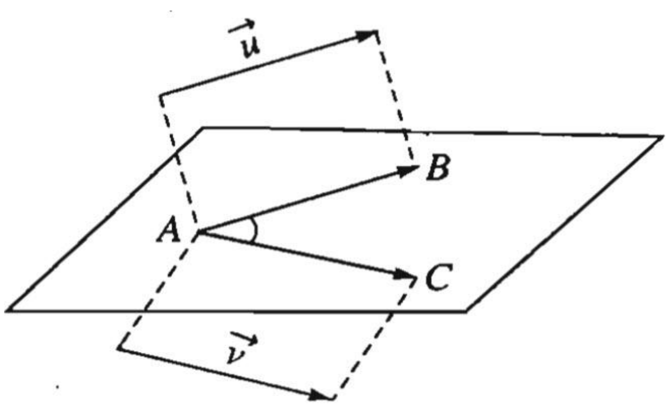
Góc giữa hai vectơ (khác véctơ không) $\vec{u},\vec{v}$ là góc BAC với $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$

- Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:

Cho hai vectơ khác vectơ không $\vec{u},\vec{v}$:

Biểu thức $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.cos(\overrightarrow{u,v})$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Nếu $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.



2. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Vectơ $\vec{a}$ khác vectơ- không, được gọi là véctơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

- Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì k$\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

- Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn xác định khi biết một điểm và vectơ chỉ phương của nó.

- Hai đường thẳng phân biệt song song với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng vectơ chỉ phương cùng phương với nhau.

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Định nghĩa:

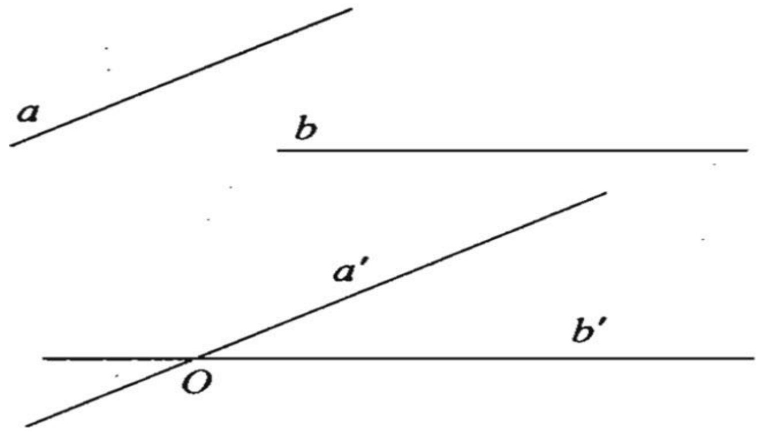
Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b

Chú ý:

- Điểm O có thể lấy trên một trong hai đường thẳng a và b.

- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá.

- Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vec tơ chỉ phương của a và b và $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \alpha$ thì góc $(a;b) = \alpha$ nếu $0 < \alpha \leq 90^0$ và bằng $180^0 - \alpha$ nếu $\alpha > 90^0$.



4. Hai đường thẳng vuông góc với nhau

Định nghĩa:

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0

Nhận xét:

- Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$.

- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

- Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Phương pháp: Để tính góc giữa hai đường thẳng a, b chéo nhau trong không gian ta có thể áp dụng một trong hai cách sau:

- Tìm một góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng a, b; đưa vào một tam giác, sử dụng các hệ thức trong tam giác (đặc biệt là định lý cô- sin).

- Lấy các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương với a, b; biểu diễn $\vec{u}, \vec{v}$ qua các vectơ đã biết độ dài và góc, tính $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ rồi suy ra góc $(a; b)$.

II. Bài tập

1. Bài tập vận dụng

Bài 1 : Cho tứ diện ABCD đều. CM: AB vuông góc với CD

Hướng dẫn tóm tắt: dùng tích vô hướng AB.CD = 0

C2:Gọi M là tđ của AB ,CM cho AB ⊥ (MCD)

Bài 2 : Cho hình chop S.ABC có AB = AC, góc SAC = góc SAB. M là trung điểm BC. C/M a. AM vuông góc với BC và SM vuông góc với BC b. SA vuông góc với BC

Hướng dẫn tóm tắt: a, Δ ABC cân ⇒ AM ⊥ BC. b, Δ SAB= Δ SAC(cgc) ⇒ SB=SC ⇒ SM ⊥ BC

Bài 3 :Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

a. CM: AO ⊥ CD

b. Tính góc giữa 2 đt AB và CD

Hướng dẫn tóm tắt: a, AO ⊥ (BCD) ⇒ AO ⊥ CD

b.Gọi M là trđ CD ⇒ AM ⊥ CD ,lại có AO ⊥ CD ⇒ CD ⊥ (AMB) ⇒ CD ⊥ AB

Bài 4 : Cho tứ diện ABCD có đáy BCD là tam giác đều cạnh 2a, AB= AC= AD = 2 3 a

a.CMR AD vuông góc BC

b,Gọi I là trung điểm CD. Tính góc giữa AB và CD

Hướng dẫn tóm tắt: a.Gọi E là tr đ CB ⇒ AE ⊥ BC. Δ DBC đều ⇒ DE ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (AED) ⇒ BC ⊥ AD

cách 2: BC.AD = BC.(AE + ED) = 0 ⇒ BC ⊥ AD

b. I là trung điểm CD ⇒ BI ⊥ CD;AI ⊥ CD ⇒ CD ⊥ AB

2. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Cho hình lập phương ABC**D.**EFGH. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng:

A. 60^0. **B.** 0^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. Biết SA = a, SA ⊥ B**C.** Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, S**C.** Góc giữa hai đường thẳng SD và BC là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** $30^{0.}$

Câu 3: Cho hình lập phương ABC**D.**A'B'C'D', góc giữa đường thẳng A'C' và B'C là:

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Góc giữa đường thẳng SB và CD là:

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 5: Cho hình hộp ABC**D.**A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh sau, mệnh đề nào sai?

A. $AC \perp B'D'$. **B.** $AA' \perp BD$. **C.** $AB' \perp CD'$. **D.** $AC \perp BD$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0.. **D.** 60^0..

Câu 7: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Khi đó $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = ?$

A. a^2. **B.** $-a^2$. **C.** $-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\frac{a^2}{2}$.

Câu 8: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

B. Góc giữa hai đường thẳng nhỏ hơn hoặc bằng 90^0.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông. Đường thẳng SA vuông góc với đường thẳng

A. SC. **B.** SB. **C.** BC. **D.** SD.

Câu 10: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$? **A.** $90^{0.}$ **B.** $45^{0.}$ **C.** $120^{0.}$ **D.** $60^{0.}$